Mathematik-Prüfungstraining

6. Thema: Stochastik

Zusammenfassung des Stoffs

1. Baumdiagramme und Pfadregeln

   a) Ergebnisse, Ereignisse, Unterschied zwischen „und“ und „oder“

   Ein Zufallsexperiment kann einzelne Ergebnisse haben, die man dann zu Ereignissen zusammenfassen kann, für deren Wahrscheinlichkeiten man sich interessiert. Beispiel Würfelwurf: Die möglichen Ergebnisse lauten {1}, {2}, …, {6}. Ereignisse könnten z.B. sein „Augenzahl gerade“ ({2;4;6}), „Augenzahl Primzahl“ ({2;3;5}), „Augenzahl ungerade und Primzahl“ ({3;5}), „Augenzahl ungerade oder Primzahl“ ({1;2;3;5}).

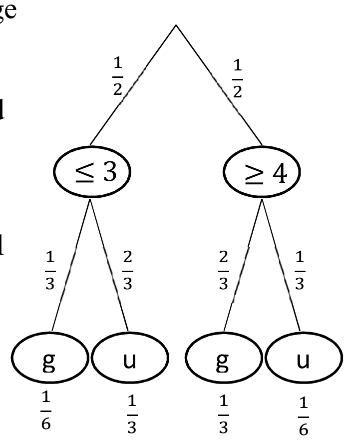
   Man sieht schon, dass „und“ eine Einschränkung bedeutet, da mehr als eine Bedingung gleichzeitig erfüllt sein muss, während es für „oder“ genügt, wenn *eine* der angegebenen Bedingungen erfüllt wird.

   In der Mengenschreibweise bedeutet „und“ die Schnittmenge $A \cap B$, „oder“ die Vereinigungsmenge $A \cup B$.

   Die Wahrscheinlichkeit $P(A \cap B)$ ist also mit Sicherheit kleiner als die kleinere der beiden Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$, während $P(A \cup B)$ größer als die größere der beiden Wahrscheinlichkeiten sein muss.

   b) Bedingte Wahrscheinlichkeit, stochastische Unabhängigkeit

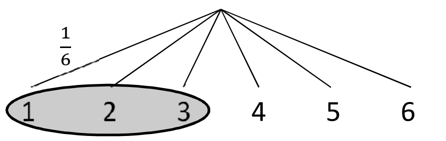
   Bei mehrstufigen Zufallsexperimenten muss man unterscheiden, ob es sich um abhängige oder unabhängige Experimente handelt. Einfach ist es, wenn z.B. mehrere Würfel oder ein Würfel mehrfach hintereinander geworfen werden. Die Ergebnisse sind eindeutig voneinander unabhängig. Problematisch ist, wenn nur ein Experiment durchgeführt wird und zwei verschiedene Eigenschaften betrachtet werden, z.B. „Augenzahl gerade“ und „Augenzahl ≤ 3“. Hier muss man sich klar machen, ob die eine Information die Wahrscheinlichkeit des zweiten Ereignisses ändert. Wenn man weiß, dass die Augenzahl zwischen 1 und 3 liegt, dann ist es wahrscheinlicher, dass es sich um eine ungerade Zahl handelt als um eine gerade. Also sind die beiden Ereignisse nicht unabhängig voneinander. Allerdings sind z.B. die Ereignisse „Augenzahl gerade“ und „Augenzahl ≤ 4“ voneinander unabhängig! Denn von den Zahlen 1, 2, 3, 4 ist jeweils die Hälfte gerade/ungerade, genauso wie wenn man alle Zahlen von 1-6 betrachtet.

   Zeichnet man ein Baumdiagramm, so kommen an die Pfade der zweiten (dritten, …) Stufe jeweils die bedingten Wahrscheinlichkeiten (siehe nebenstehendes Beispiel).

   c) Addition von Wahrscheinlichkeiten (Summenregel)

   Wenn mehrere Ergebnisse eines einstufigen Zufallsexperiments zu einem Ereignis zusammengefasst betrachtet werden, dann ist die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses die Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ergebnisse. Im Baumdiagramm bedeutet dies praktisch die Zusammenfassung mehrerer paralleler Äste zu einem einzigen Ast:

   $P = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

   Wichtig hierbei ist, dass sich Ergebnisse nicht „überschneiden“ können. Es tritt immer entweder das eine oder das andere Ergebnis ein.

   Beispiel beim Würfelwurf: Die Wahrscheinlichkeit für {1}, {2} usw. ist jeweils $\frac{1}{6}$. Somit ist die Wahrscheinlichkeit $P(\text{"Augenzahl gerade"}) = P(\{2;4;6\})$ gleich $P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

   Auch die Wahrscheinlichkeiten zweier disjunkter *Ereignisse* (die also keine gemeinsamen *Ergebnisse* enthalten) lassen sich addieren, z.B. $P(\{1;2\}) + P(\{5;6\}) = P(\{1;2;5;6\})$

   Die Wahrscheinlichkeiten von zwei nicht disjunkten Ereignissen lassen sich nicht addieren, da man sonst die Schnittmenge doppelt zählt! Beim Würfelwurf ist $P(\text{"Augenzahl gerade"}) = \frac{1}{2}$ und $P(\text{"Augenzahl} \leq 3\text{"}) = \frac{1}{2}$, aber $P(\text{"Augenzahl gerade oder} \leq 3\text{"}) \neq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, denn die Augenzahl 2 ist sowohl gerade als auch ≤ 3.

d) Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten

Bei mehrstufigen Zufallsexperimenten ergibt sich die Wahrscheinlichkeit der Endergebnisse am Ende jeden Pfades des Baumdiagramms als Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang der hinführenden Äste.

Beispiel: Wurf zweier Würfel. Die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Würfel eine Augenzahl ≤ 5 und der zweite eine gerade Augenzahl zeigt, ist $P(\text{"Augenzahl} \leq 5\text{"}) \cdot P(\text{"Augenzahl gerade"}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$
Achtung: Der Wurf der beiden Würfel ist voneinander unabhängig! Wenn es sich um einen einzigen Würfelwurf handeln würde, dann wäre die Wahrscheinlichkeit von „Augenzahl ≤ 5 und gerade“ nicht das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten, denn wenn die Augenzahl ≤ 5 ist, ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um eine gerade Zahl handelt nicht mehr $\frac{1}{2}$ sondern $\frac{2}{5}$. In einem Baumdiagramm schreibt man an die Äste der zweiten Stufe dementsprechend die bedingten Wahrscheinlichkeiten.

e) Übertragung auf andere Aufgabenstellungen

Bei einfachen Zufallsexperimenten wie dem Würfelwurf sind die Pfadregeln leicht einzusehen. Die Herausforderung ist, dieses Prinzip auch auf andere Aufgaben zu übertragen.

Beispiel: Wie wahrscheinlich ist es, dass ein zufällig herausgegriffener Schüler weiblich oder blond ist?
Hier darf ich *nicht* die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten für „weiblich“ und „blond“ addieren, denn dann würde ich Blondinen doppelt zählen. Erst recht wenn die Wahrscheinlichkeit gesucht ist, dass ein Schüler „weiblich *und* blond“ ist: Diese ist *kleiner* als die Wahrscheinlichkeiten für „weiblich“ und „blond“, da es sich um eine zusätzliche Einschränkung handelt. Da man die zwei Eigenschaften als ein zweistufiges Zufallsexperiment auffassen kann, müssen stattdessen Wahrscheinlichkeiten entlang der Äste miteinander multipliziert werden.
Aber Vorsicht: Wenn „weiblich“ und „blond“ nicht voneinander unabhängig sind, dann hat man bedingte Wahrscheinlichkeiten und muss $P(\text{"weiblich"}) \cdot P_{\text{"weiblich"}}(\text{"blond"})$ bzw. $P(\text{"blond"}) \cdot P_{\text{"blond"}}(\text{"weiblich"})$ bilden!

2. Kombinatorik (Anzahl Möglichkeiten), Urnenmodelle

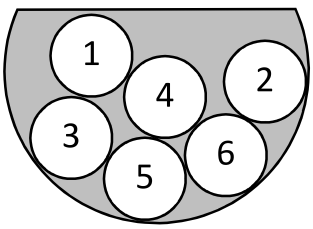
Unterscheide zunächst, ob in der Aufgabe nach einer Anzahl an Möglichkeiten gefragt ist oder nach einer Wahrscheinlichkeit. Eine Anzahl Möglichkeiten muss eine ganze Zahl sein. Eine Wahrscheinlichkeit muss ein Bruchteil (Zahl zwischen 0 und 1) sein.

Die Urnenmodelle dienen zunächst der Berechnung einer Anzahl von Möglichkeiten. Daraus lässt sich dann ggf. die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnen (Anzahl der „günstigen“ Möglichkeiten geteilt durch die Gesamtanzahl der möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments).

Versuche die Aufgabenstellung in ein Urnenmodell zu übersetzen und unterscheide, ob es auf die Reihenfolge der gezogenen Kugeln ankommt (geordnet/ungeordnet), und ob jede Kugel nach dem Ziehen zurückgelegt wird oder nicht, also ob es „Doppelte“ geben kann, bzw. ob sich nach dem ersten Zug die Wahrscheinlichkeit für die übrigen Kugeln geändert hat oder nicht.

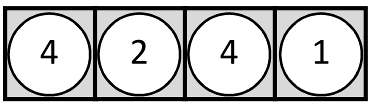
Im Prinzip gibt es vier Möglichkeiten; im Lehrplan werden aber nur drei davon behandelt:

a) Geordnete Stichprobe mit Zurücklegen



← n unterscheidbare Kugeln
auf ↓ k Plätze verteilt

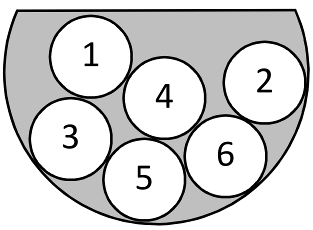
⇨ n^k Möglichkeiten
Jedes Ergebnis hat $p = \frac{1}{n^k}$



Doppelte sind möglich,
k und n sind unabhängig.

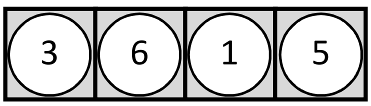
Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Kette und Binomialverteilung sind Spezialfälle!

b) Geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen



← n unterscheidbare Kugeln
auf ↓ k Plätze verteilt

⇨ $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$
$= \frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten

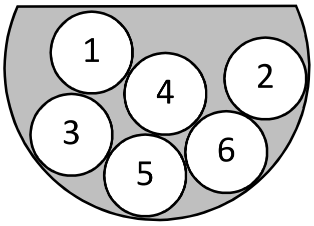


Doppelte sind nicht möglich,
es muss $k \leq n$ sein.

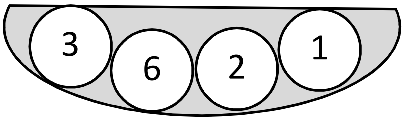
Spezialfall 1: Permutation
$k = n$, d.h. alle Kugeln werden gezogen und „umsortiert“. ⇨ $\boxed{n!\text{ Möglichkeiten}}$

Spezialfall 2: MISSISSIPPI-Problem
n Kugeln, von denen jeweils $n_1, n_2, \dots, n_r$ gleich sind ⇨ $\boxed{\frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_r!}\text{ Möglichkeiten}}$
(d.h. die Summe aller n_i muss n ergeben)

c) Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen



← aus n unterscheidbaren Kugeln ⇨ $\boxed{\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}\text{ Möglichkeiten}}$
werden mit einem Griff ↓ k gezogen



Doppelte sind nicht möglich,
es muss $k \le n$ sein.

Spezialfall: Urne mit s/w Kugeln
Die Urne enthält N Kugeln, die NICHT ALLE unterscheidbar sind. S sind schwarz, W sind weiß.
$N = S + W$. Es werden n Kugeln mit einem Griff (ungeordnet, ohne Zurücklegen) gezogen.
Es gäbe $\binom{N}{n}$ Möglichkeiten, wenn alle Kugeln unterscheidbar wären. Die Wahrscheinlichkeit für jedes einzelne Ergebnis wäre also $\frac{1}{\binom{N}{n}}$. Nun ergeben aber alle $\binom{S}{s}$ Möglichkeiten, die man hat, s von den S schwarzen Kugeln in der Urne zu ziehen, das gleiche Ergebnis.

Es hat also die $\binom{S}{s}$-fache Wahrscheinlichkeit: $\frac{\binom{S}{s}}{\binom{N}{n}}$. Und auch alle $\binom{W}{w}$ Möglichkeiten, w von den W weißen Kugeln in der Urne zu ziehen, resultieren im gleichen Ergebnis.

Die Wahrscheinlichkeit ist also noch $\binom{W}{w}$-mal so groß: $\boxed{P(X = s) = \frac{\binom{S}{s}\cdot\binom{W}{w}}{\binom{N}{n}}}$

3. Wahrscheinlichkeiten, Tafelwerk

a) Zufallsgröße, Wahrscheinlichkeitsverteilung
Häufig interessiert uns ein konkreter Zahlenwert, der als Ergebnis eines Zufallsexperiments herauskommt. Dies kann beispielsweise die Augenzahl eines Würfels oder die Augensumme mehrerer Würfel sein, aber auch die Anzahl gezogener schwarzer Kugeln, oder die bei einem Glücksspiel erreichte Punktzahl oder der gewonnene Geldbetrag. Diesen Zahlenwert bezeichnet man als Zufallsgröße X. Die n verschiedenen möglichen Werte, die diese annehmen kann, sind dann $x_1, x_2, \dots, x_n$. Die Wahrscheinlichkeit, dass X genau den Wert x_i annimmt, ist $P(X = x_i)$. P ist also eine Funktion, die einem zu jedem möglichen Wert, den eine Zufallsgröße annehmen kann, dessen Wahrscheinlichkeit angibt. Dies nennt man Wahrscheinlichkeitsverteilung von X. Man kann sie als Säulendiagramm darstellen. Bei einer Binomialverteilung ergibt sich eine glockenförmige Verteilung (maximale Wahrscheinlichkeit in der Mitte, am Rand Ausläufer mit geringer Wahrscheinlichkeit).

b) Kumulative Verteilungsfunktion
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße höchstens einen bestimmten Wert x_i annimt, also $P(X \le x_i)$, ist die Summe aller Wahrscheinlichkeiten für die Werte x_1 bis x_i. Da Wahrscheinlichkeiten immer positiv sind, ergibt sich für diese sogenannte kumulative Verteilungsfunktion eine Treppenform. Der minimale Wert „ganz links“ ist 0, der maximale Wert „ganz rechts“ ist 1, denn die Summe aller Wahrscheinlichkeiten ergibt 1.

Möchte man die Wahrscheinlichkeit $P(a \le X \le b)$ berechnen, so ist dies $P(X \le b) - P(X < a)$.
Wenn die Zufallsgröße nur ganze Zahlen annehmen kann, dann kann man statt $X < a$ auch $X \le a - 1$ schreiben.

c) Bernoulli-Experimente
Spezialfall der geordneten Stichprobe mit Zurücklegen. Die n Kugeln sind nun aber nicht alle unterscheidbar, sondern s davon sind „Treffer“, der Rest $(n - s)$ „Nieten“. Die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer bei einmal Ziehen ist somit $p = \frac{s}{n}$, die Wahrscheinlichkeit für eine Niete ist $q = 1 - p$. Die Anzahl n der Kugeln in der Urne muss nun nicht einmal bekannt sein. Es kann sich auch um eine laufende Produktion handeln, bei der sich überhaupt keine feste Anzahl an Kugeln festlegen ließe. Aber das Wichtige ist, dass die Trefferwahrscheinlichkeit p als konstant angenommen werden kann.

d) Bernoulli-Kette
Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Bernoulli-Experiment k-mal hintereinander einen Treffer zu erzielen, ist p^k.
Die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Kombination aus Treffern & Nieten (mit Beachtung der Reihenfolge!) ist dann z.B. $P(\text{"}TNTTNN\text{"}) = p \cdot q \cdot p \cdot p \cdot q \cdot q = p^2 q^3$.

e) Binomialverteilung
Interessiert uns nur die Wahrscheinlichkeit für das k-fache Auftreten eines Treffers bei n-maligem Ziehen aus einer Urne mit unbekannter Anzahl an Kugeln, aber bekannter Trefferwahrscheinlichkeit p, so müssen wir alle Kombinationen mit gleich vielen Treffern aus der Bernoulli-Kette zusammenfassen.
Wenn k Treffer auf n Plätze verteilt werden können, gibt es dafür $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten (siehe Urnenmodell c)).
Die Wahrscheinlichkeit für k Treffer (und somit $(n-k)$ Nieten) ist also $\binom{n}{k}$-mal so hoch wie die einer bestimmten Reihenfolge (Bernoulli-Kette).

Somit gilt $\boxed{P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}=B(n;p;k)}$

Den Wert für die Wahrscheinlichkeit für bis zu (= höchstens) k Treffer, also
$P(X\leq k)=P(X=0)+P(X=1)+\cdots+P(X=k)=\sum_{i=0}^{k}B(n;p;i)$ findet man im Tafelwerk.

Ist die Wahrscheinlichkeit für mindestens (= ab) k Treffer gesucht, so arbeitet man mit dem Gegenereignis:
$P(X\geq k)=1-P(X<k)=1-P(X\leq k-1)$

f) 3x mindestens-Aufgaben
geg: p; $P(X\geq 1)\geq P$ / ges: n
Lsg: $1-P(X=0)\geq P$
$P(X=0)\leq 1-P$
$q^n\leq 1-P$
$(1-p)^n\leq 1-P$
$n\geq \log_{(1-p)}(1-P)$ ⇨ Ergebnis immer aufrunden!

Aufgabenstellung:
Die Trefferwahrscheinlichkeit beträgt p.
Wie viele Kugeln (n) muss man mindestens ziehen, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Treffer mindestens P beträgt?

4. Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung

Der Erwartungswert μ bzw. $E(X)$ einer Zufallsgröße X ist anschaulich der Durchschnittswert, den die Zufallsgröße bei einer großen Anzahl von ausgeführten Experimenten auf lange Sicht hat. Es kann sich dabei um einen „krummen“ Wert handeln, den die Zufallsgröße selbst nie annehmen kann.

Beispiel: Bei einem Glücksspiel gewinnt man mit einer Chance von 1 % einen Betrag von 50 €. Verliert man, so bedeutet dies einen Verlust von 1 €. Der Erwartungswert beträgt dann $0{,}01\cdot 50+0{,}99\cdot(-1)=-0{,}49$.
Im Mittel verliert man pro Spiel also 49 Cent, obwohl dies bei keinem einzelnen Spiel passieren kann.

Die Varianz Var(*X*) und die Standardabweichung $\sigma(X)$ einer Zufallsgröße geben an, wie stark die einzelnen Werte um den Erwartungswert μ streuen. Die Varianz ist als mittlerer *quadratischer* Abstand definiert, da sich ansonsten positive und negative Werte gegenseitig aufheben würden, da es gleich wahrscheinlich ist, dass die Zufallsgröße einen Wert größer oder kleiner als μ annimmt. Die Standardabweichung ist wiederum die Wurzel aus der Varianz. Dies ist *nicht* dasselbe als wenn man aus den einzelnen Summanden in der Varianz die Wurzel ziehen würde!

Obiges Bsp: $\mathrm{Var}(X)=0{,}01\cdot\big(50-(-0{,}49)\big)^2+0{,}99\cdot\big(-1-(-0{,}49)\big)^2=25{,}7499$, $\sigma(X)=\sqrt{25{,}7499}\approx 5{,}07$

Die Bedeutung des genauen Werts der Varianz/Standardabweichung kann man sich nicht einfach anschaulich vorstellen und muss es auch nicht. Es reicht zu wissen, dass die Zufallsgröße um so mehr um den Erwartungswert streut, je größer Varianz/Standardabweichung sind. Im Allgemeinen ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße einen Wert annimmt, der im Bereich von $\pm\sigma$ um μ herum liegt, etwa 68 %. Die Wahrscheinlichkeit, dass *X* im Bereich $\mu\pm 2\sigma$ liegt, beträgt bereits 95 %, und die Wahrscheinlichkeit, dass *X* in einer 3σ-Umgebung liegt, 99,7 %.

$$\mu=E(X)=\sum_{i=1}^{n}P(X=x_i)\cdot x_i \quad / \quad \mathrm{Var}(X)=\sum_{i=1}^{n}P(X=x_i)\cdot(x_i-\mu)^2 \quad / \quad \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Für die Binomialverteilung vereinfachen sich die Formeln extrem: $\mu=n\cdot p$ und $\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot q}$.
Die Formel für μ sollte man anschaulich nachvollziehen können.

5. Hypothesentests

Basis: Urnenmodell, ungeordnete Stichprobe mit Zurücklegen, Bernoulli-Kette mit Trefferwahrscheinlichkeit p.
Allerdings ist p nicht bekannt. Es wird eine Vermutung (Nullhypothese H_0) über p aufgestellt, die durch einen Stichprobentest (Ziehen von n Kugeln) überprüft werden soll. Man legt eine Entscheidungsregel fest, für welche Trefferanzahlen man H_0 ablehnt (Ablehnungsbereich K), und wann man H_0 nicht ablehnt (Annahmebereich $\overline{K}$).
Obwohl es Annahmebereich heißt, bedeutet es nicht, dass die Nullhypothese H_0 mit großer Wahrscheinlichkeit zutrifft und man sie annehmen sollte, sondern nur, dass man sie nicht sicher ablehnen kann.

		Wirklichkeit	
		H_0 ist wahr	H_0 ist falsch
Testergebnis (Zufallsexperiment)	H_0 wird abgelehnt	**Fehler 1.Art**	✓
	H_0 wird nicht abgelehnt	✓	**Fehler 2.Art**

Man kann die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Entscheidungsfehler nicht beide gleichzeitig klein bekommen. Wenn man die Entscheidungsregel verändert, also die Grenze g zwischen K und $\overline{K}$ verschiebt, wird zwar der eine Fehler kleiner, aber der andere größer.

Da man die Wahrscheinlichkeit α' für den Fehler 1.Art direkt berechnen kann (da H_0 wahr ist, ist p gegeben, somit folgt $\alpha' = P_{H_0}(X \in K)$), für den Fehler 2.Art aber nicht, formuliert man von Anfang an die Nullhypothese so, dass der Fehler 1.Art der „schlimmere" von beiden ist, den man also vermeiden möchte.

Rechtsseitiger Hypothesentest: H_0 lautet $p \leq b$ oder $p = b$, die Gegenhypothese H_1 ist $p > b$. Somit ist H_0 abzulehnen, falls die Anzahl k der Treffer in der Stichprobe zu groß ist: $K = \{g; \ldots; n\}$ und $\overline{K} = \{0; \ldots; g-1\}$.
Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1.Art beträgt $\alpha' = P_b^n(X \geq g) = 1 - P_b^n(X \leq g-1)$.

Linksseitiger Hypothesentest: H_0 lautet $p \geq b$ oder $p = b$, die Gegenhypothese H_1 ist $p < b$. Somit ist H_0 abzulehnen, falls die Anzahl k der Treffer in der Stichprobe zu klein ist: $K = \{0; \ldots; g\}$ und $\overline{K} = \{g+1; \ldots; n\}$.
Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1.Art beträgt $\alpha' = P_b^n(X \leq g)$.

Wenn die Entscheidungsregel (also die Grenze g) gegeben ist, kann α' mit Hilfe des Tafelwerks berechnet werden.

Soll eine Entscheidungsregel gefunden werden, so ist ein Signifikanzniveau α gegeben, also ein Maximalwert für die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1.Art. Man muss also die Ungleichung $\alpha' < \alpha$ aufstellen, ggf. umformen (beim rechtsseitigen Test) und schließlich im Tafelwerk in der entsprechenden Spalte den Wahrscheinlichkeitswert suchen, der die Bedingung gerade erfüllt.

Beispiel: Du vermutest, dass mindestens 20 % der Autos auf Deutschlands Straßen der Marke VW angehören und willst eine Wette mit einem Mitschüler abschließen. Ihr einigt euch darauf, 100 Autos zu zählen. Wenn darunter mindestens 25 VWs sind, hast du gewonnen, wenn es 15 oder weniger sind, hast du verloren. Befindet sich die Anzahl dazwischen, dann steht es unentschieden. Als H_0 wählen wir $p \geq 0{,}2$, somit ist H_1: $p < 0{,}2$. Für dich ist ungünstig, wenn du mit H_0 Recht hast, aber trotzdem verlierst, weil nur 15 oder weniger VWs vorbeifahren. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist $\alpha' = P_{0,2}^{100}(X \leq 15) = 12{,}851\ \%$ (Tafelwerk S.18). Wie groß sind deine Gewinnchancen, wenn du Recht hast? Es müssen mindestens 25 VWs vorbeifahren. Nehmen wir an, dass deine Annahme H_0 stimmt (dann handelt es sich also bei der folgenden Wahrscheinlichkeit nicht um einen Fehler!): $P_{0,2}^{100}(X \geq 25) = 1 - P_{0,2}^{100}(X \leq 24) = 1 - 0{,}86865 = 13{,}135\ \%$. Die Chancen sind also einigermaßen ausgeglichen, höchstwahrscheinlich wird es aber ein Unentschieden. Wie müsste die Entscheidungsregel lauten, damit du mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 1 % verlierst? Es gilt also nun, anstatt der Zahl 15 einen anderen Wert g zu suchen, für den $\alpha' = P_{0,2}^{100}(X \leq g) \leq 0{,}01$ gilt. Dies ist für $g = 10$ der Fall (Tafelwerk S.17), hier ist $\alpha' = 0{,}57\ \%$. Du solltest also darauf bestehen, dass du nur dann verloren hast, wenn unter den 100 Autos maximal 10 VWs sind.

Übungsaufgaben im Netz

Übungsaufgaben mit Lösungen auf http://www.raschweb.de

Wachhalten/Diagnostizieren-Aufgaben mit Lösungen auf
http://lehrerfortbildung-bw.de/faecher/mathematik/gym/fb1/modul4/basis/

Übungsaufgaben mit schrittweiser Hilfestellung und sofortiger Korrektur auf http://www.mathegym.de

Rechenregeln in Videoform erklärt, mit kleinen Zwischenfragen (Vorlesung zur Vorbereitung aufs Mathestudium, behandelt aber elementaren Schulstoff recht anschaulich und ausführlich): http://capira42.appspot.com

Original-Abituraufgaben mit Lösungen auf http://www.abiturloesung.de

